Chapitre 26

Proba : convergence et approximation

I Vers la convergence en probabilité

1) Inégalité de Markov

Théorème 1 (*Inégalité de Markov*)

Soit X une variable aléatoire positive admettant une espérance, et soit $a > 0$.
Alors $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}$

▷ *Preuve :*

◁

2) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2 (*Inegalité de Bienaymé-Tchebychev*)

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance et une variance. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

▷ *Preuve :*

◁

3) Application : Loi faible des grands nombres

L'inégalité de Bienaimé Tchebitchev permet d'obtenir des approximations intéressantes, mais son utilisation principale est le théorème ci dessous :

Théorème 3 (*Loi Faible des grands nombres*)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi admettant une même espérance m et une variance.

Soit $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) = 0$$

▷ *Preuve :*

◁

Interprétation :
$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est appelé "moyenne empirique" de X_1, X_2, ..., X_n. C'est effectivement une moyenne au sens classique du terme.
La loi faible dit que si on augmente n, alors la probabilité que $\bar{X}_n$ diffère de m de plus de ε (c'est ce que signifie $[|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon]$) tend vers 0.
Autrement dit, $\bar{X}_n$, pour n grand, vaut "presque" m. On dira, en deuxième année, que la suite $(\bar{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge "en loi" vers m.

Exemple d'utilisation : sondage

II Vers la convergence en loi

Proposition 1

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires telles que, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = P(X = k)$$

où X suit une loi de Poisson de paramètre λ

▷ *Preuve :*

◁

Interprétation :

Ce résultat signifie que, pour n grand, une variable de loi binomiale de paramètres n et $\frac{\lambda}{n}$ se comporte presque comme une loi de Poisson de paramètre λ.
On dira en deuxième année que X_n converge en loi vers X.
Ce résultat peut s'étendre à toute binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ telle que $np_n \to \lambda$. On dit alors que la loi de Poisson est la loi des événements rares, c'est à dire la loi associée à un comptage de succès échecs, mais pour une probabilité de succès faible et un très grand nombre d'essais....